پاسخنامه آزمون ریاضی عمومی ۲– تاریخ: ۲۰ دی ۱۳۹۳

۱. حاصل انتگرال دوگانه زیر را بیابید.

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dxdy = ?$$

حل:

$$D_y:\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{\ln 3}\ ,\ 0 \le y \le 2\sqrt{\ln 3}$$

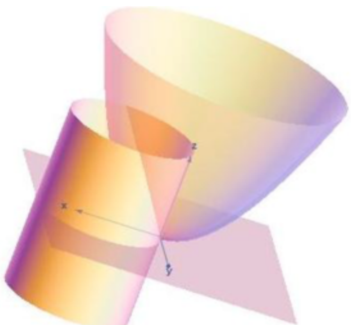
$$\to\ D_x:\ 0 \le x \le \sqrt{\ln 3}\ ,\ 0 \le y \le 2x$$

$$\to \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} \int_0^{2x} e^{x^2}\,dydx = \int_0^{\sqrt{\ln 3}} 2x\, e^{x^2}\,dx = e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 3}} = 3 - 1 = 2$$

---

۲. حجم محصور به سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$، صفحه $z = 0$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ را بیابید.

حل:



$$D:\ \ x^2 + y^2 \le 2x \quad \to \quad V = \iint_D (f(x,y) - g(x,y))dA$$
$$= \iint_D (x^2 + y^2 - 0)dA$$

$$D_1:\ \ r^2 \le 2r\cos\theta \ \to\ V = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3\,drd\theta = 4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$V = 2\pi + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4\theta + 1)\, d\theta = 3\pi$$

---

۳. مقدار کار میدان برداری $F(x,y) = (3+2xy)i + (x^2-3y^2)j$ را روی خم C به معادله $r(t) = (e^t \sin t)i + (e^t \cos t)j$ که $0 \le t \le \pi$، بدست آورید.

حل: طبق فرمول کار، مقدار کار انجام شده توسط میدان برداری F روی خم C برابر است با $\int_C F.dr$. از طرفی میدان فوق میدان پایستار (ابقایی) است زیرا:

$$F = (P,Q) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

بنابراین طبق قضیه تابع f (با عنوان تابع پتانسیل) را طوری می‌یابیم که:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q} \rightarrow f(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int (x^2-3y^2)dy + h(x) = x^2y - y^3 + h(x)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + h'(x) = P(x,y) = 3 + 2xy \rightarrow h(x) = 3x \rightarrow \boxed{f = x^2y - y^3 + 3x}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_C F.dr = f(B) - f(A)}, \quad B = r(\pi) = (0, -e^{\pi}), \qquad A = r(0) = (0,1)$$

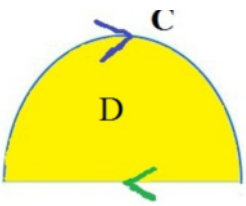
$$\rightarrow \int_C F.dr = f(B) - f(A) = f(0,-e^{\pi}) - f(0,1) = \boxed{e^{3\pi} + 1}$$

---

۴. مقدار انتگرال

$$\oint_C xydx + \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)dy$$

را بیابید که در آن C یک بار در جهت عقربه‌های ساعت مسیر بازه $[-1,1]$ روی محور xها و نیمه بالایی بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ را می‌پیماید.



حل: بر طبق قضیه گرین داریم:

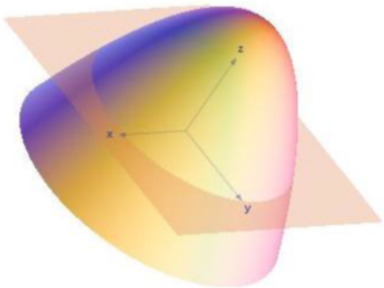
$$\oint_C xydx + \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)dy = -\oint_{(-C)} xydx + \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)dy = -\iint_D ydA$$

که در آن D نیم بیضی بالایی است. توجه کنیم که در قضیه گرین جهت منحنی مثبت استاندارد بوده اما در مسئله جهت C عکس آن است لذا به همین دلیل در تساوی‌های فوق جهت منفی برای بکارگیری قضیه گرین بکار گرفته شده است.

$$D: x^2 + 4y^2 \le 1\,, \qquad y \ge 0$$

$$D_1:\ u^2+v^2\le 1\,,\qquad v\ge 0,\quad \mathrm{u=x, v=2y},\qquad \mathrm{J}=\frac{1}{2}$$

$$=-\iint_{\mathrm{D}} y\mathrm{dA}=-\frac{1}{4}\iint_{D_1} v\,\mathrm{dA}=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2\sin\theta\,drd\theta=\frac{1}{12}\cos\theta\Big|_0^{\pi}=\boxed{\frac{-1}{6}}$$



۵. درستی قضیه استوکس را برای میدان برداری $F(x,y,z)=-4yi+2zj+3xk$ روی منحنی C مرز جسم محصور بین سطوح $z=10-x^2-y^2$ و $z=1$ با جهت مثبت مثلثاتی تحقیق کنید.

حل:

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_{(S)}\mathrm{Curl}(F)\cdot n\,d\sigma=?$$

$$\mathrm{Curl}(F)=(-2,-3{,}4)$$

$$z=f(x,y)=10-x^2-y^2\ \to n=-\frac{(f_x,f_y,-1)}{\sqrt{{f_x}^2+{f_y}^2+1}}=-\frac{(-2x,-2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},$$

$$d\sigma=\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\le 9$$

$$\iint_{(S)}\mathrm{Curl}(F)\cdot n\,d\sigma=-\iint_{\mathrm{D}}(-2,-3{,}4)\cdot(-2x,-2y,-1)\mathrm{dA}=-\iint_{\mathrm{D}}(4x+6y-4)\mathrm{dA}=\boxed{36\pi}$$

توجه کنیم که علامت منفی برای n لحاظ شده است زیرا جهت C مثبت مثلثاتی بوده و بر طبق تعریف می-بایست جهت n باید بالا باشد یعنی z باید مثبت باشد. از طرفی برای سمت دیگر تساوی نیز داریم:

$$\oint_C F\cdot dr=?\ \to\ \boxed{C:\ x^2+y^2=9\,,z=1}\to r(t)=(3\cos t\,,3\sin t\,,1)$$

$$\to \acute{r}(t)=(-3\sin t\,,3\cos t\,,0)$$

$$\oint_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}(-12\sin t\,,2{,}9\cos t)\cdot(-3\sin t\,,3\cos t\,,0)dt=36\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$=18\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=\boxed{36\pi}$$
